ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελίδα 76

Α2. Σχολικό σελίδα 128

Α3. Σχολικό σελίδα 141

Α4.

i Σ ii Σ iii Λ iv Σ v Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Ισχύει : $f^3(x) + 3f(x) + x = 0 \; , x \in \mathbb{R}$ (1)

Για $x = 0$ έχουμε : $f^3(0) + 3f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) \cdot (f^2(0) + 3) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Β2.

Έστω $x_1 , x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Τότε ισχύουν :

$f^3(x_1) = f^3(x_2) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; 3f(x_1) = 3f(x_2)$. Άρα από την (1) προκύπτει :

$-x_1 = -x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Οπότε η f είναι ″$1-1$″ και αντιστρέψιμη .

Θέτουμε $y = f(x)$, οπότε : $y^3 + 3y + x = 0 \Leftrightarrow x = -y^3 - 3y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f^{-1}(y) = -y^3 - 3y$. Επομένως είναι $f^{-1}(x) = -x^3 - 3x$.

Β3.

Θα αποδείξουμε ότι για κάθε $x_1 , x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ *ισχύει ότι*

$f(x_1) > f(x_2)$.Έστω ότι υπάρχουν $x_1 , x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \; \kappa\alpha\iota \; f(x_1) \leq f(x_2)$.

Τότε ισχύουν : $f^3(x_1) \leq f^3(x_2) \;\; \kappa\alpha\iota \;\; 3f(x_1) \leq 3f(x_2)$

Άρα ισχύει : $f^3(x_1) + 3f(x_1) \leq f^3(x_2) + 3f(x_2) \Leftrightarrow -x_1 \leq -x_2 \Leftrightarrow x_1 \geq x_2$,

άτοπο . Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

B4.

$f(x) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(0) \Leftrightarrow x > 0$.

B5.

Έστω $x_1 , x_2 \in \mathbb{R}$ $\mu\varepsilon$ $x_1 < x_2$. Τότε διαδοχικά έχουμε :

$f(x_1) > f(x_2)$

$1 - x_1 > 1 - x_2 \Leftrightarrow -f(1 - x_1) > -f(1 - x_2)$.

Άρα $g(x_1) > g(x_2)$, οπότε g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

B6.i)

Με $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση γίνεται : $3f(f(|x| + 1) - 13) + f(|x| + 1) - 13 > -8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -[f(f(|x| + 1) - 13)]^3 > -8 \Leftrightarrow f(f(|x| + 1) - 13) < 2$.

Ισχύει όμως ότι : $f^{-1}(2) = -14 \Leftrightarrow f(-14) = 2$, άρα η ανίσωση γίνεται :

$f(f(|x| + 1) - 13) < f(-14) \Leftrightarrow f(|x| + 1) - 13 > -14 \Leftrightarrow$

$f(|x| + 1) > -1 \Leftrightarrow f(|x| + 1) > f(4) \Leftrightarrow |x| + 1 < 4 \Leftrightarrow |x| < 3 \Leftrightarrow -3 < x < 3.$

B6.ii)

Με $x \in \mathbb{R}$ η ανίσωση γίνεται :

$f(2^x) - f(1 - 2^x) > f(3^x) - f(1 - 3^x)$ (2)

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - f(1 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα , άρα

$g(2^x) > g(3^x) \Leftrightarrow 2^x < 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x < \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x > 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 . Η g είναι παραγωγίσιμη στο Dg= ℝ ως διαφορά παραγωγίσιμων συναρτήσεων , με $g'(x)= 2x - 2x\ln(x^2+1) - 2x = -2x\ln(x^2+1)$

Λύνω $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, αφού $\ln(x^2+1) \geq 0$, xϵ ℝ.

x	-∞	0	+∞
g′(x)	+	0	-
g(x)	↗	0	↘

g γνησίως αύξουσα (-∞ , 0]

g γνησίως φθίνουσα [0 , +∞)

$g(x) \leq 0$, xE ℝ

Γ2 . Η f είναι παραγωγίσιμη στο Df = ℝ *, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1} * x^2 - 2x * \ln(x^2+1)}{x^4} =$

$\frac{2x^3 - 2x*\ln(x^2+1)*(x^2+1)}{x^4*(x^2+1)} = \frac{2x(x^2 - \ln(x^2+1)*(x^2+1))}{x^4*(x^2+1)}$

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

Λύνω $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x\, g(x) = 0 \Leftrightarrow x=0$

x	-∞	0	+∞
f′(x)	+	0	-
f(x)	↗	0	↘

$x > 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x)<0$

$x < 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x < 0 \\ g(x) < 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) > 0$

f γνησίως αύξουσα στο $(-\infty , 0]$, $f(x) \le f(0) = 1$

f γνησίως φθίνουσα στο $[0 , +\infty)$ (αφού η f συνεχής στο $D_f = \mathbb{R}$).

Γ3. Η εξίσωση είναι $x^2 = k + \ln(x^2 + 1)\bullet(x^2 + 1) \Leftrightarrow$

$x^2 - (x^2 + 1)\bullet \ln(x^2 + 1) = k \Leftrightarrow g(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$

→ $g((-\infty,0])$, g γνησίως αύξουσα και συνεχής =>

=> $(\lim_{x \to -\infty} g(x), g(0)] = (-\infty, 0] = \Delta 1$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} (x^2 - (x^2 +1) * \ln (x^2 +1)) =$

$= \lim_{x \to -\infty} (x^2 \bullet(1 - \frac{x^2+1}{x^2} \bullet\ln (x^2 +1))$

Αφού $\lim_{x \to -\infty}(x^2) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty}(\frac{x^2+1}{x^2}) = 1$,

$\lim_{x \to -\infty} \ln (x^2 + 1) = +\infty$

→ g ([0, +∞)) , g γνησίως φθίνουσα και συνεχής =>

= > $(\lim_{x \to +\infty}, g(0)] = (-\infty, 0] = \Delta 2$

$\lim_{x \to +\infty} \ln (x^2 + 1)$, $x^2 + 1 = \omega$, $\omega \to +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \ln\omega = +\infty$

Αν k < 0 → k∈Δ1, k∈Δ2, η g(x) = k έχει ακριβώς 2 ρίζες στο $\mathbb{R}$.

Αν k = 0 → μοναδική ρίζα x=0 (ολικό μέγιστο)

Αν k > 0 → k∉Δ1, k∉Δ2 , η g(x) = k αδύνατη .

Γ4. $L = \int_0^1 x^3 f(x)\, dx = \int_0^1 \ln(x^2 + 1)\, dx = \int_1^2 \frac{1}{2} \ln\omega\, dx =$

Θέτω $x^2 + 1 = \omega \Rightarrow 2xdx = d\omega \Rightarrow xdx = \frac{1}{2} d\omega$

Για x=0 → ω=1
Για x=1 → ω=2

= > $\frac{1}{2}\int_1^2 (\omega) \ln\omega\, d\omega = \frac{1}{2}[\omega * \ln\omega]_1^2$ - $\int_1^2 1\, d\omega$

= > $\frac{1}{2}$ * (2 ln 2 – ln 1) – 1*(2 – 1) = <u>ln2 -1</u> .

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε ότι: $\frac{1}{x}f(x)+\ln x f'(x)=\ln x f(x) \Leftrightarrow$
$(\ln x f(x))'=\ln x f(x)$. Άρα, υπάρχει σταθερά $c\in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε:
$\ln x f(x)=ce^x$. Για $x=e$: $c=1$. Οπότε, $f(x)=\frac{e^x}{\ln x}$, $x>1$.

Δ2. Για κάθε $x\in(1,+\infty)$ έχουμε ότι: $f'(x)=\frac{e^x(\ln x-\frac{1}{x})}{\ln^2 x}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x-\frac{1}{x}$, $x>1$.
Η h συνεχής στο $(1,+\infty)$, με: $h'(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$, $x>1$. Άρα, η $h \uparrow (1,+\infty)$
Έχουμε ότι: $h((1,+\infty))=(-1,+\infty)$.
$0\in h((1,+\infty))$. Άρα, υπάρχει μοναδικό $x_o\in(1,+\infty)$, τέτοιο ώστε: $h(x_0)=0$.
Για $1<x<x_o \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x)<h(x_o) \Leftrightarrow h(x)<0$. Οπότε και $f'(x)<0$.
Για $x>x_o \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(x)>h(x_o) \Leftrightarrow h(x)>0$. Οπότε και $f'(x)>0$.
Άρα, υπάρχει μοναδικό $x_o\in(1,+\infty)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο, με: $f(x_o)=\frac{e^{x_o}}{\ln x_o}$ (1) και $f'(x_o)=0 \Leftrightarrow \ln x_o-\frac{1}{x_o}=0 \Leftrightarrow \ln x_o=\frac{1}{x_o}$ (2)
Από (1),(2): $f(x_o)=x_o\cdot e^{x_o}$.

Δ3. Το όριο γίνεται: $\lim_{x\to x_o}[(f(x)+1)-f(x))\frac{1}{f(x)-f(x_o)}]=l$.
Έχουμε ότι: $\lim\limits_{x\to x_o}[(f(x)+1)-f(x)]=f(x_0+1)-f(x_0)>0$, διότι
x_o, $x_o+1\in[x_o,+\infty)$ όπου η f είναι γνησίως αύξουσα, οπότε:
$x_o+1>x_o \Leftrightarrow f(x_o+1)>f(x_o)$ και
η f στο x_o έχει ελάχιστο, άρα για $x\neq x_o$ ισχύει: $f(x)>f(x_o) \Leftrightarrow$
$f(x)-f(x_o)>0$. Άρα, $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{1}{f(x)-f(x_o)}=+\infty$. Οπότε, $l=+\infty$.

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ

Δ4.i.Έχουμε ότι:g(x)=$\frac{e^x}{x}$, x>1.
Η g συνεχής και 2 φορές παραγωγίσιμη στο (1,+∞),με:
g′′(x)=$\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$>0,για κάθε x∈(1,+∞).Άρα,η g κυρτή στο (1,+∞) και η εφαπτομένη της C_f στο M(2,g(2)) έχει εξίσωση y=$\frac{e^2}{4}$x.
Επειδή,η g είναι κυρτή στο (1,+∞),η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη της C_g στο M με εξαίρεση το σημείο επαφής στο οποίο ισχύει η ισότητα.Δηλαδή,g(x)≥ $\frac{e^2}{4}$x⇔4g(x) ≥ e^2x,για κάθε x∈(1,+∞).Η ισότητα ισχύει για x=2.Άρα,η εξίσωση 4g(x)=e^2x έχει μοναδική λύση την x=2.

ii.E=$\int_2^3 |g(x)|dx=\int_2^3 g(x)dx$,διότι g(x)>0,για κάθε x>1.
Από Δ4.i έχουμε ότι: g(x)≥ $\frac{e^2}{4}$x,για κάθε x∈(1,+∞).Η ισότητα ισχύει για x=2.Οπότε, $\int_2^3 g(x)dx>\int_2^3 \frac{e^2}{4}xdx \Leftrightarrow E>\frac{5e^2}{8}$.

ΓΚΟΥΜΑ ΑΝΘΗ

ΠΑΣΧΑΛΗΣ ΝΙΚΑΣ

ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ

ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΣ ΑΡΗΣ

ΠΑΝΑΓΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ

Φροντιστήρια ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ