

**ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β)
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και

$f(a) \neq f(\beta)$, τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $\chi_0 \in (a, \beta)$ τέτοιος ώστε, $f(\chi_0) = \eta$

(Μονάδες 7)

A2. Να διατυπώσετε το Θ. Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά

(Μονάδες 4)

A3. Να γραφεί ο ορισμός του τοπικού ελαχίστου

(Μονάδες 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα από το γράμμα που αντιστοιχεί κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Αν f, g , είναι δυο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g δεν ορίζεται, αν $f(A) \cap B = \emptyset$.
- ii. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$.
- iii. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 6} (f(x)g(x))$ τότε είναι ίσο με $f(6)g(6)$
- iv. Η συνάρτηση $a\chi^3 + \beta\chi^2 + \gamma\chi + \delta$ με $a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $a \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής.
- v. Αν $a = \beta$ τότε $\int_a^\beta f(x) dx = 0$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} και σύνολο τιμών το \mathbb{R} , για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 3f(x) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να υπολογίσετε την τιμή $f(0)$.

(Μονάδες 3)

B2. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 4)

B3. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα .

(Μονάδες 5)

B4. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 2)

B5. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση : $g(x) = f(x) - f(1 - x)$, $x \in \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα .

(Μονάδες 3)

B6. Να λύσετε τις ανισώσεις : i) $3f(f(|x| + 1) - 13) + f(|x| + 1) > 5$.

(Μονάδες 4)

$$\text{ii) } f(2^x) - f(3^x) > f(1 - 2^x) - f(1 - 3^x).$$

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παρακάτω συνεχείς συναρτήσεις στο \mathbb{R} ,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases} \quad \text{και} \quad g(x) = x^2 - (x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1).$$

Γ1. Να μελετήσετε την g ως προς την μονοτονία και το πρόσημο της

(Μονάδες 5).

Γ2. Να δείξετε ότι η f αλλάζει μονοτονία εκατέρωθεν του $x_0 = 0$ και $f(x) \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Μονάδες 6).

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης :
 $x^2 = k + (x^2 + 1) \cdot \ln(x^2 + 1)$, καθώς το k διατρέχει το \mathbb{R} .

(Μονάδες 8)

Γ4. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $L = \int_0^1 x^3 f(x) dx$

(Μονάδες 6) .

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

- $f(x) = x(\ln x) \cdot (f(x) - f'(x))$, $x > 1$
- $f(e) = e^e$

Δ1. Να δείξετε ότι: $f(x) = \frac{e^x}{\ln x}$, $x > 1$.

(Μονάδες 5)

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, +\infty)$, στο οποίο η f να παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο ισούται, με: $x_0 \cdot e^{x_0}$.

(Μονάδες 6)

Δ3. Αν x_0 η θέση του τοπικού ελαχίστου, να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x+1) - f(x)}{f(x) - f(x_0)}$$

(Μονάδες 5)

Δίνεται, επιπλέον, η συνάρτηση: $g(x) = \frac{f(x)}{x^2} + f'(x) \frac{\ln x}{x}$, $x > 1$.

Δ4.i. Να λύσετε την εξίσωση $4g(x) = e^{2x}$.

(Μονάδες 5)

ii. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , τις ευθείες $x=2, x=3$ και τον άξονα x' , να δείξετε ότι: $E > \frac{5e^2}{8}$

(Μονάδες 4)

ΟΔΗΓΙΕΣ (για σας εξεταζόμενους)

- 1.** Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε καμία άλλη σημείωση.**
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
- 4.** Να γράψετε σας απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
- 5.** Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
- 6.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 7.** Διάρκεια εξέτασης: Τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 8.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: Μία (1) ώρα μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

**ΓΚΟΥΜΑ ΑΝΘΗ
ΠΑΣΧΑΛΗΣ ΝΙΚΑΣ
ΣΠΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΣΩΤΗΡΟΠΟΥΛΟΣ ΑΡΗΣ
ΠΑΝΑΓΟΥ ΓΙΩΡΓΟΣ**